Curvatura in funzione di Sviluppo

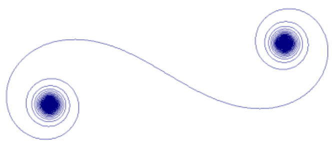
Si definisce un sistema di funzioni del tipo k=f(s).
dove k è la curvatura in un punto e s lo sviluppo della curva stessa, ovvero la distanza dall'origine.
l'origine viene assunta su un asse orizzontale, crescente verso destra, ovvero una retta di equazione k=0.
la curvatura avrà lo stesso segno dell'angolo in coordinate polari.
Una curvatura positiva sarà antioraria, una curvatura negativa sarà oraria.
In altre parole un cerchio di raggio R, tracciato in senso orario, avrà formula   k = - 1/R
un cerchio di raggio R, tracciato in senso antiorario, avrà formula k = 1/R
Questo sistema di coordinate presenta la caratteristica di esprimere, il verso di percorrenza della funzione e la funzione è differente se partiamo da un origine finita (il punto 0) oppure da $-\infty$.

Esaminiamo le **equazioni di primo grado**.

Un'equazione del tipo k = a+bs

per b=0 abbiamo detto che sarà un cerchio di raggio 1/a

analizzando la curva da $-\infty$ a $+\infty$ otteniamo una doppia spirale di questo tipo:

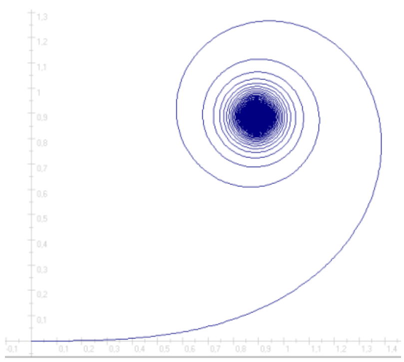


la prima spirale parte dal suo centro con curvatura infinita e procede verso l'esterno in senso orario fino al raggiungimento del punto 0 che è il cambio di curvatura fra le due spirali, quindi si avvolge in senso antiorario verso l'interno fino a raggiungere il centro della spirale con curvatura infinita.

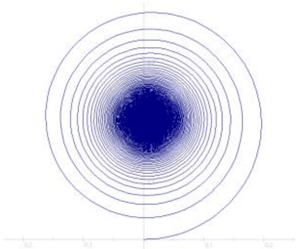
per a=0 ed b= π/c^2 La curva è nota come Clotoide o spirale di Cornu

Partendo da $-\infty$ non è possibile determinare un orientamento della curva rispetto all'asse origine, ed il parametro a, diventa ininfluente perché non fa altro che spostare il punto di passaggio fra le due spirali verso l'una o verso l'altra, ma essendo queste infinite, non fa alcuna differenza. Lo stesso vale per il parametro b che non modifica né le curvature infinite del centri delle spirali, né il punto di curvatura 0 al centro fra esse.

Le cose cambiano esaminando invece la curva a partire dall'origine,
ovvero prendendo in esame l'intervallo di lunghezza $[0;+\infty]$

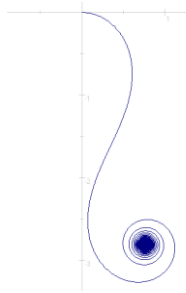


per a=0 e b=1 otteniamo una spirale di del tipo a sinistra che ha formula k=s.

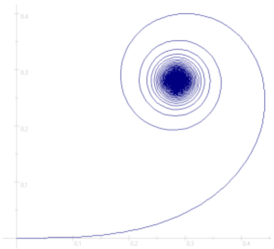


Il parametro a determina la curvatura iniziale della spirale.

La figura a sinistra ha formula k = 5+s, quella a destra un a negativo: k=-2+s



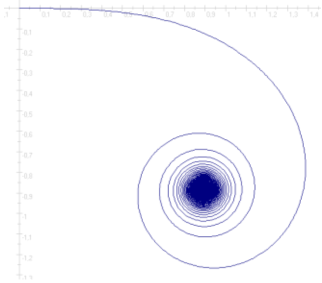
Il parametro b, determina la rapidità con cui la spirale si avvolge, produce pertanto una spirale la cui dimensione è inversamente proporzionale a b. Più grande è b più piccola è la spirale. Più piccolo è b (purché positivo) più grande la spirale .

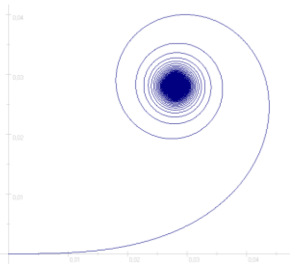


Qui a sinistra k = 10 s

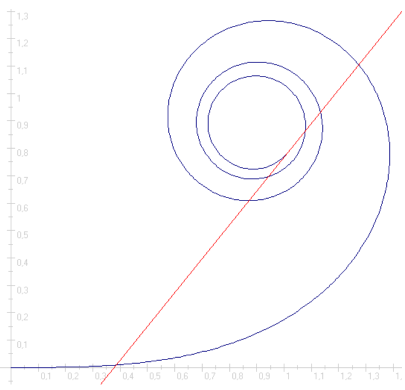
Un b negativo poi determina una rotazione oraria come nella figura di destra k = -s, funzione simmetrica rispetto a k = s.

Risulta quindi che i grafici k=a+bs sono simmetricamente speculari a k=-(a+bs)





Qui a fianco k = 1000 s. La spirale appare più piccola, mantenendo però medesime proporzioni. Cambia cioè solo la scala.



l'angolo α della retta tangente ad un punto della curva $k = f(s)$

è ricavabile dalla seguente formula:

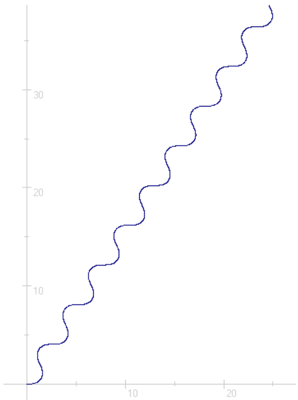
$$\alpha = \int_0^s f(s)ds = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

il grafico a sinistra è calcolato dalla formula k = s e l'angolo α risulta essere quindi: $\alpha = \frac{1}{2}s^2$

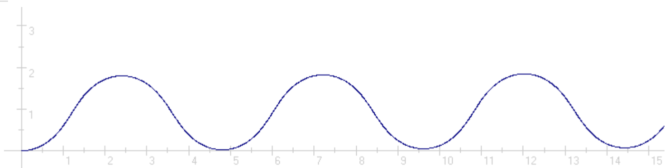
Funzioni periodiche.

Studio della classe di curve definite dalla formula $k = a + \sin(s/b)$
dove K è la curvatura, s lo sviluppo della lunghezza della curva stessa,
a e b coefficienti.

innanzitutto esaminiamo cosa succede quando a=0 e b=1.



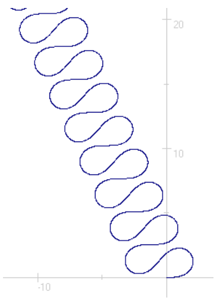
la nostra curvatura andrà ciclicamente da -1 ad 1.
La formula $k = \text{sen}(s)$ produce il grafico qui a fianco.
La funzione risulta inclinata di circa 57°,047



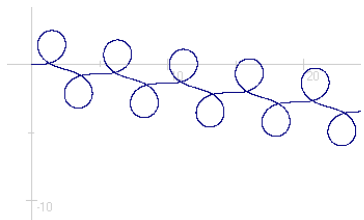
mentre $k=\cos(s)$ produce un grafico del tipo a fianco, perfettamente orizzontale.
Il primo massimo si raggiunge quando $s = \pi$ e corrisponde, in coordinate cartesiane, circa al punto x=2,405 y=1,798.

nella formula $k=\text{sen}(s/b)$, il parametro b regola la durata di una curvatura, prima di invertire la direzione.
valori inferiori ad 1 fanno tendere la curva sempre più ad una retta, i valori superiori accentuano il zig-zag:

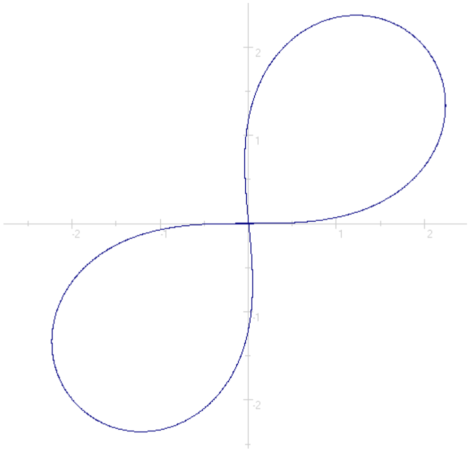
b=2



b=3



Il caso limite avviene quando b = **2,40482557** che produce una lemniscata che ritorna infinitamente su se stessa.
La lemniscata di equazione k=sin(s/b) ha un angolo al centro di 95°,4835 invece dei 90° esatti di Bernoulli ed ha una curvatura massima agli estremi di 1,



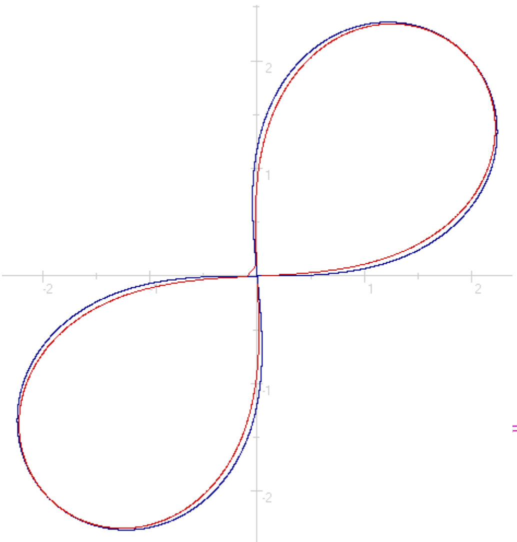
Tale lemniscata è leggermente più panciuta della lemniscata di Bernoulli come si vede dalle due figure sovrapposte nell'immagine seguente, dove è stata tracciata in blu la lemniscata

$$k = \text{sen}\left(\frac{s}{2{,}40482557}\right)$$

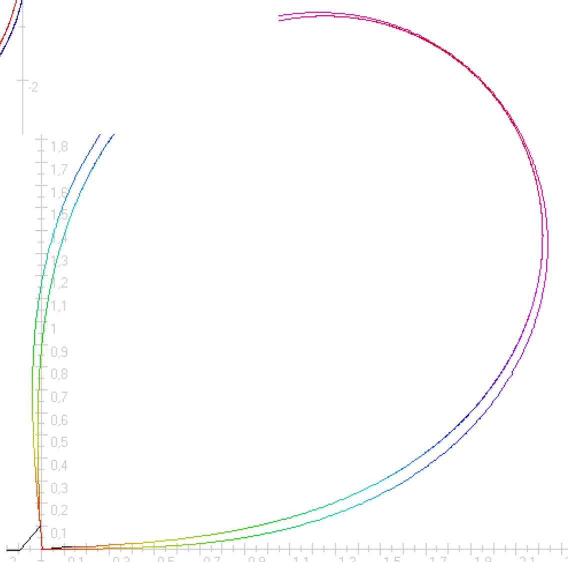
e in rosso quella di Bernoulli

$$\rho = 2\sqrt{2\,\text{sen}(2\theta - 0.0957022)}$$

tracciata in coordinate polari con il seno invece che il coseno ed un coefficiente tale da sovrapporla approssimativamente all'altra: è stata ruotata della metà di 5°,4835 (0.0957022 radianti) e disegnata con parametro a = 2 in modo da centrarla rispetto alla lemniscata blu.



Per vedere meglio questo ho fatto un altro disegno:



le mezze lemniscate nella figura a destra, sono paragonate con una gradazione di colore proporzionale alla curvatura (quella di Bernoulli è all'interno) Equazione della lemniscata di Bernoulli in figura:

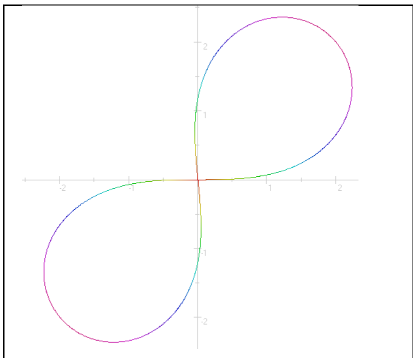
$$\rho = 2{,}0020\sqrt{2\,\text{sen}(2\theta - 0.0957022)}$$

La curvatura massima di Bernoulli è circa 1,0596 di poco superiore.

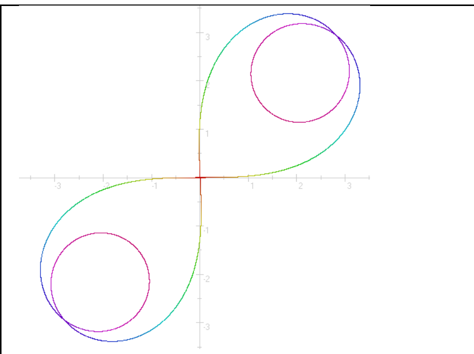
La costante 2.40482557 corrisponde alla prima radice della funzione di Bessel J0(x)

Analogamente vediamo come si trasforma la lemniscata nella radici successive della funzione di Bessel:

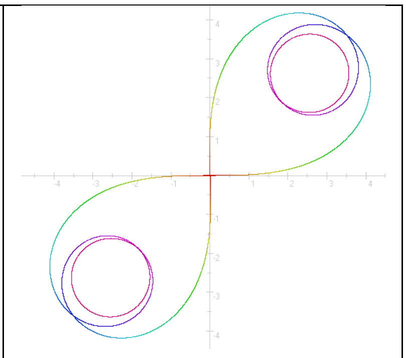
ovvero le varie x tali che $J_0(x)=0$



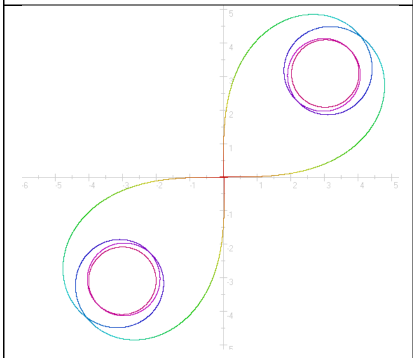
x=2.404825



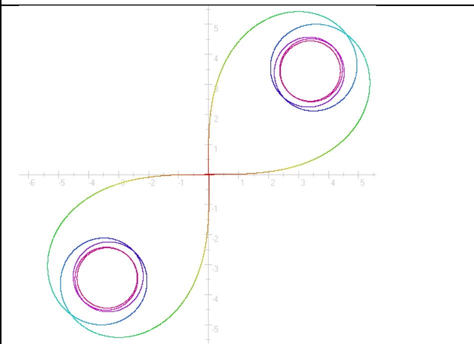
x=5.520078



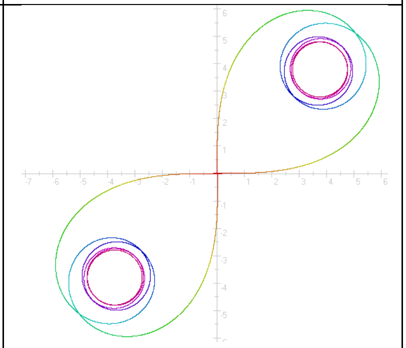
x=8.653727



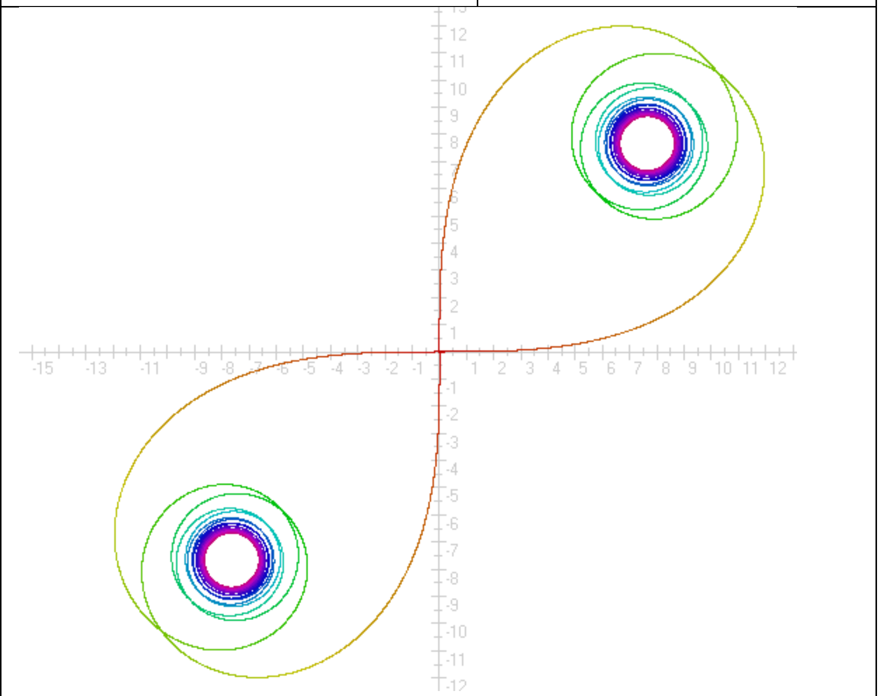
x= 11.791534



x= 14.930917

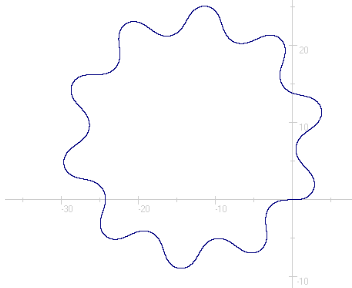
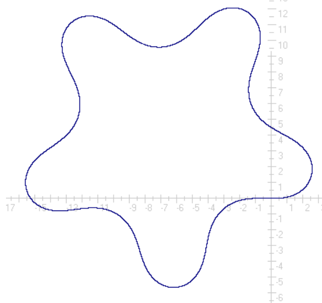
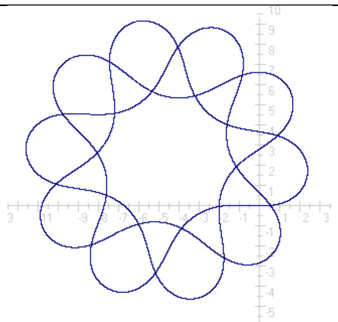
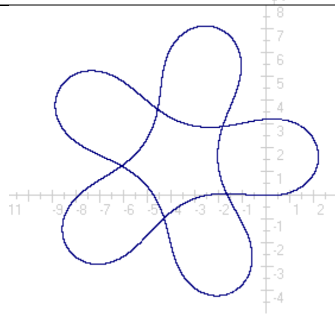
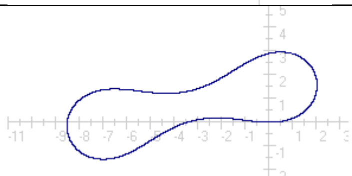
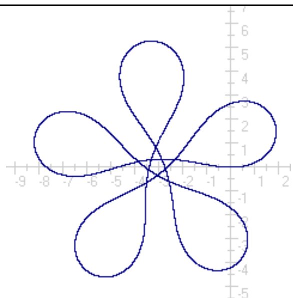
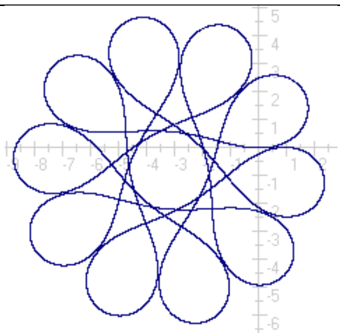
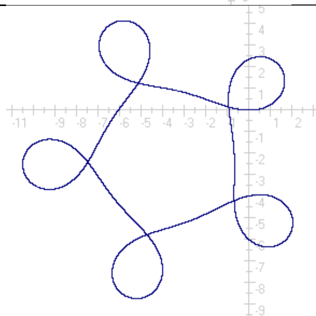
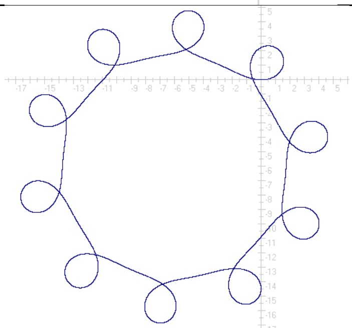
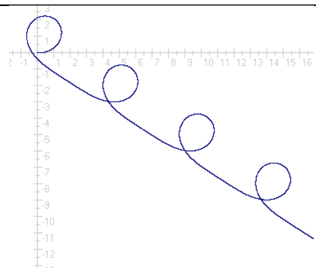
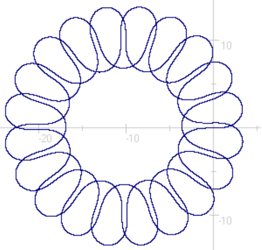
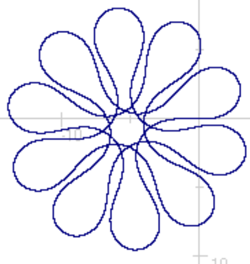


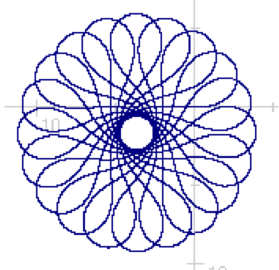
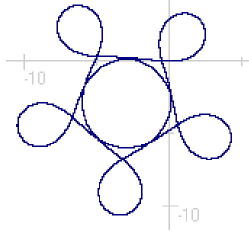
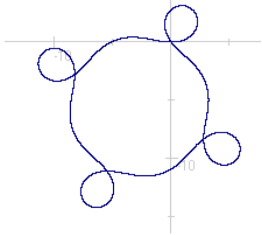
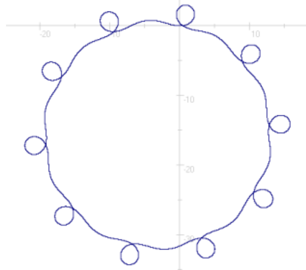
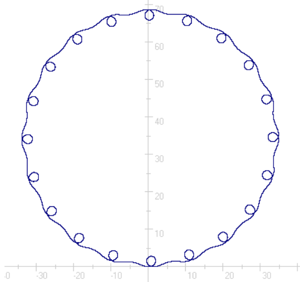
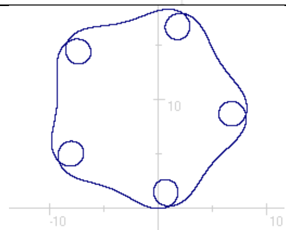
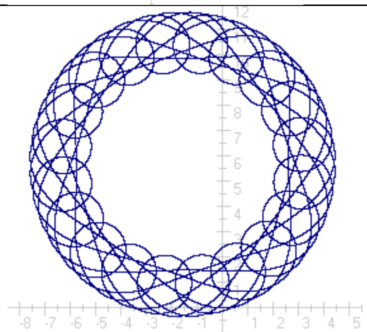
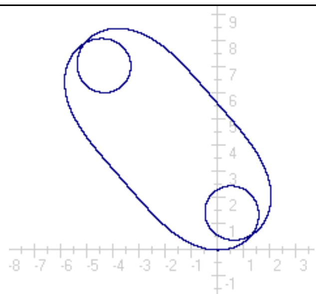
x= 18.071063

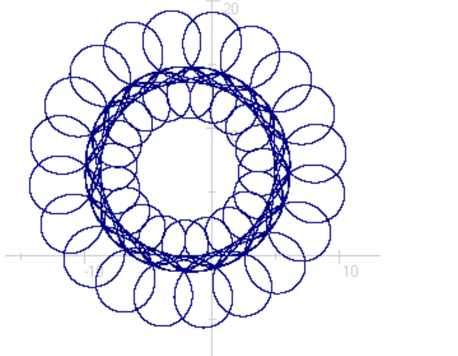
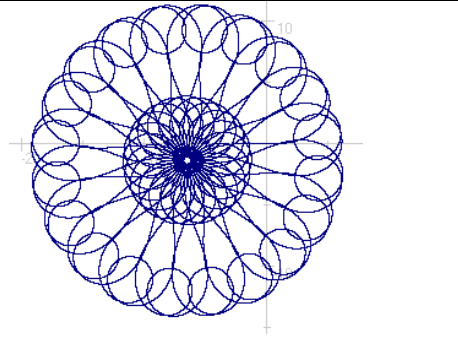
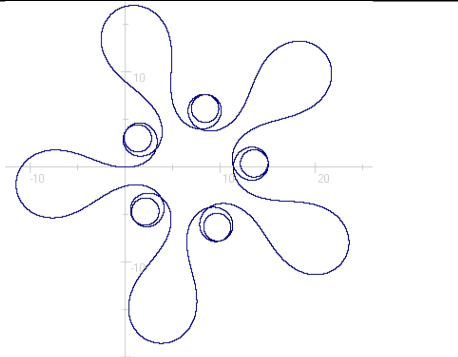
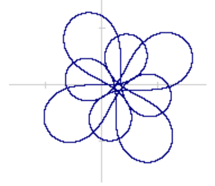
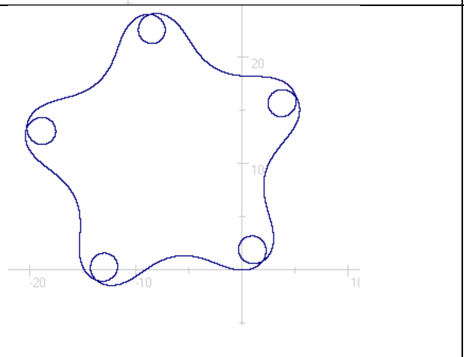
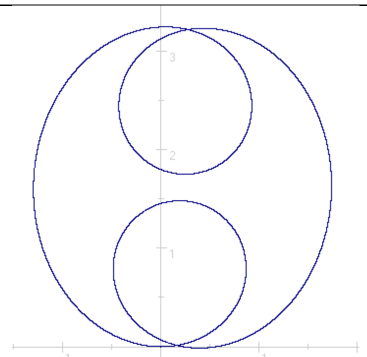
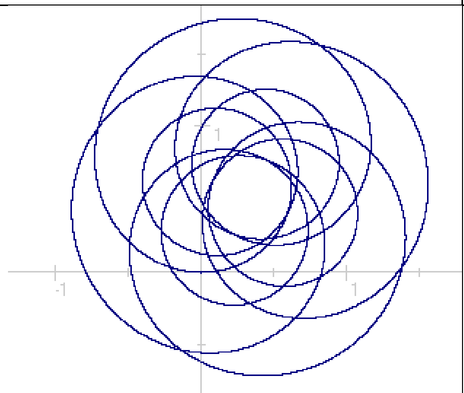
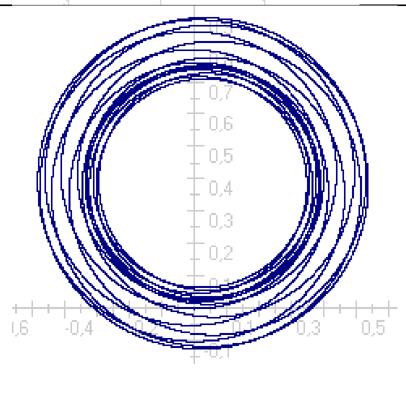
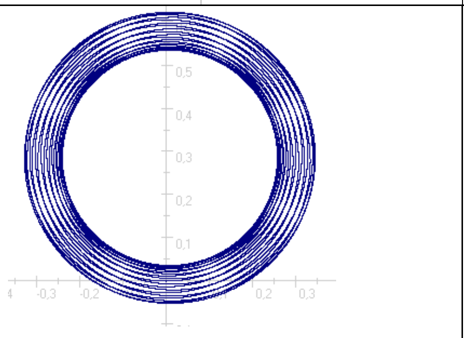
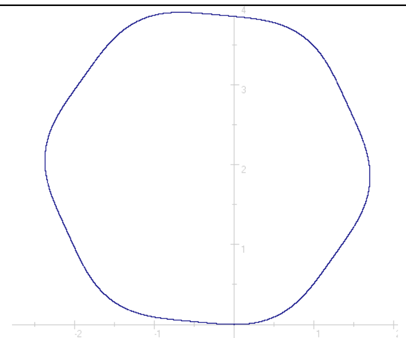
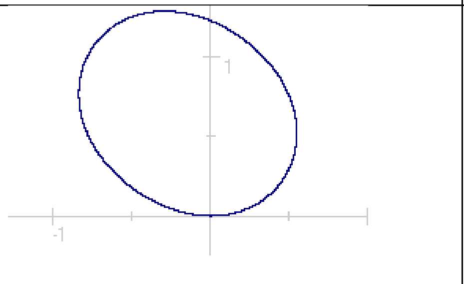
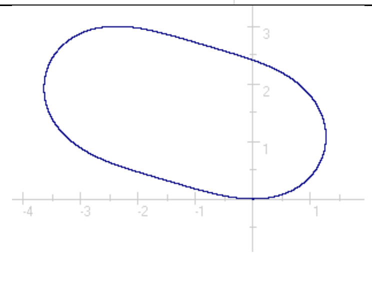


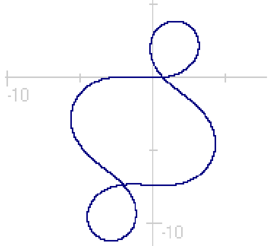
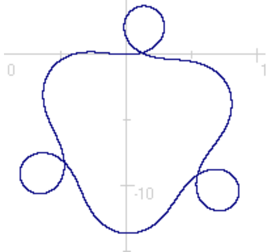
... x = 74.6145 ...

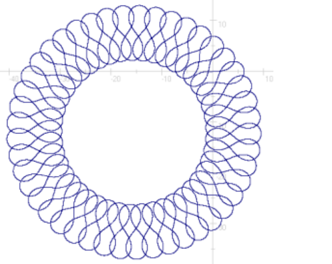
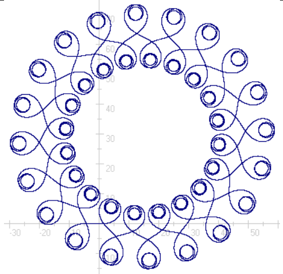
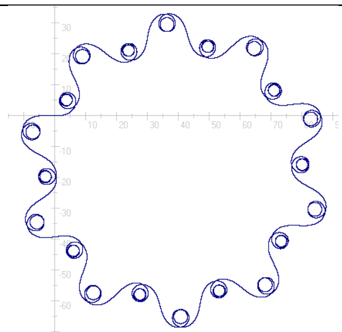
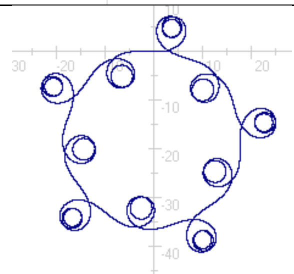
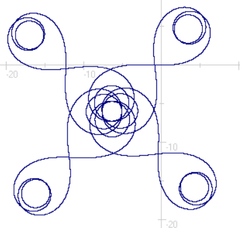
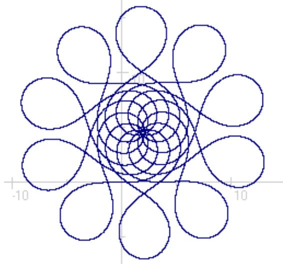
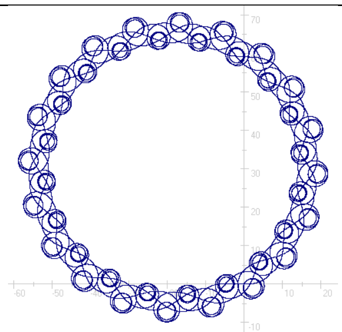
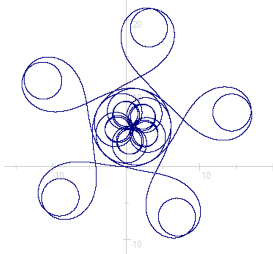
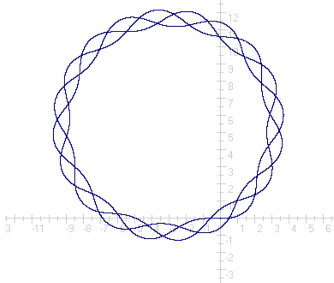
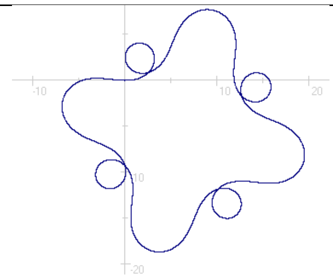
Il parametro a nella formula y=a+sin(s/b) comporta una rotazione della curva stessa.
Per esempio: per a = 0,1 e b=1 otteniamo una figura che gira su se stessa
Esempi:

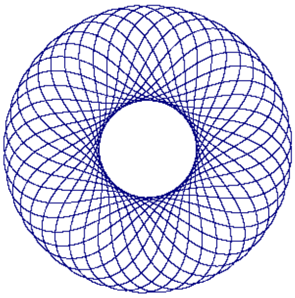
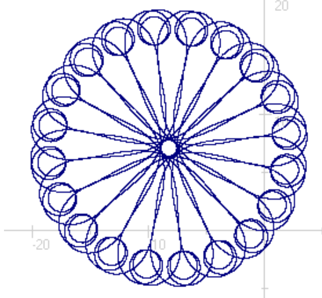
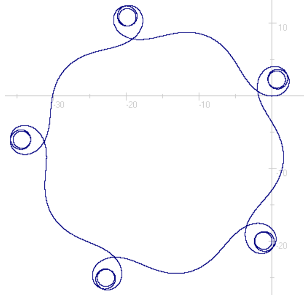
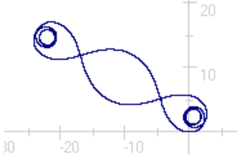
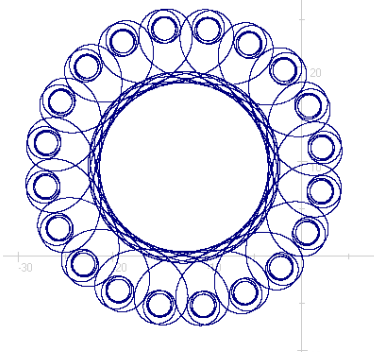
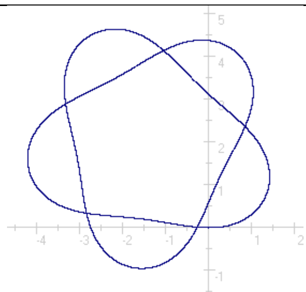
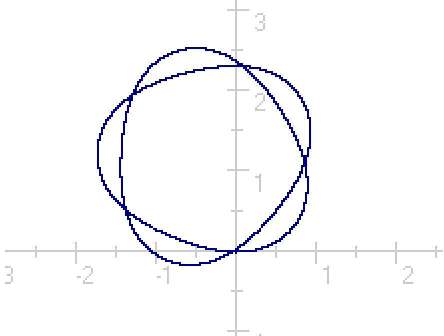
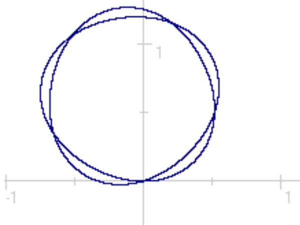
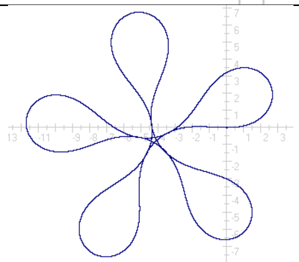
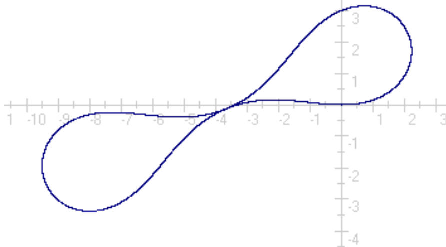
a	b		a	b	
0.1	1		0.2	1	
0.3	1		0.4	1	
0.5	1		0.6	1	
0.7	1		0.8	1	
0.9	1		1.0	1	 Si perde la circolarità
0.1	1.5		0.2	1.5	

0.3	1.5		0.4	1.5	
0.5	1.5		0.6	1.5	
0.7	1.5		0.8	1.5	
0.9	1.5		1.0	1.5	

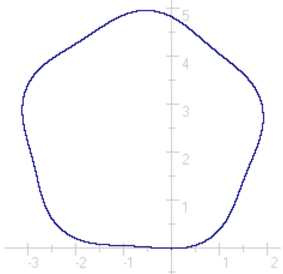
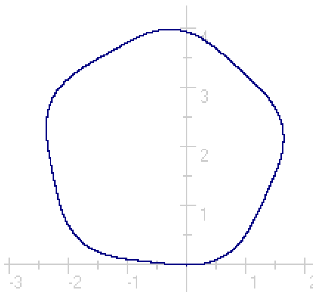
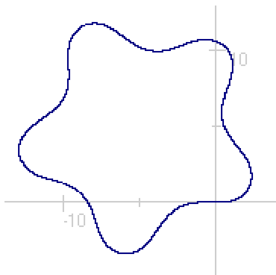
a=0.1 b=3.5		a=0.1 b=4.5	
a=0.4 b=4.5		a=0.1 b=2.5	
a=.6 b=2		a=1.5 b=1	
a=1.5 b=1.5		a=1.5 b=2.5	
a=1.5 b=3.5		a=1 b=1/6	
a=3, b=1/6		a=1 b=1/2	

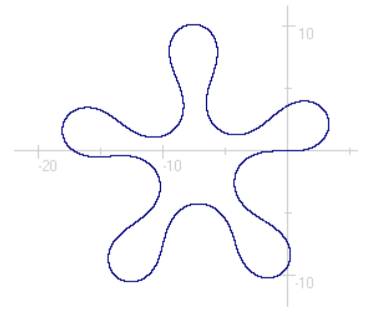
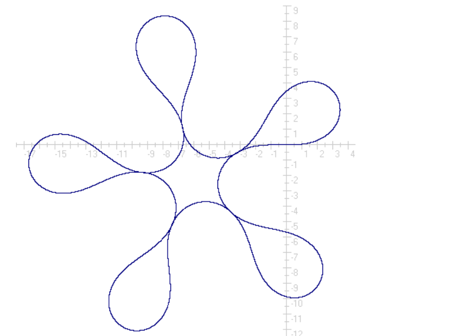
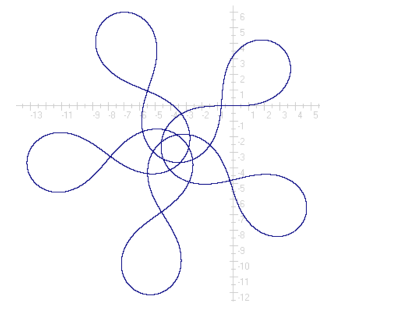
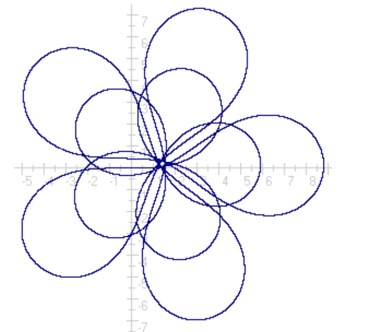
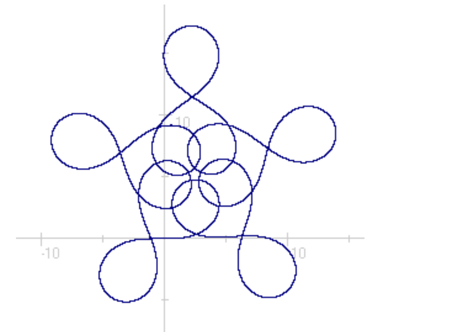
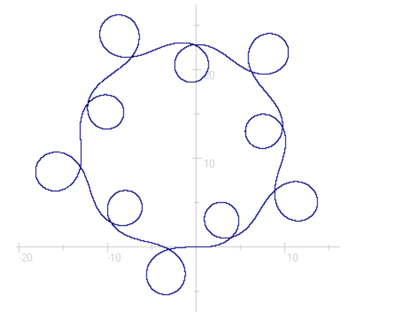
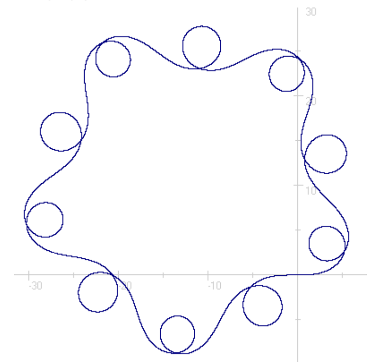
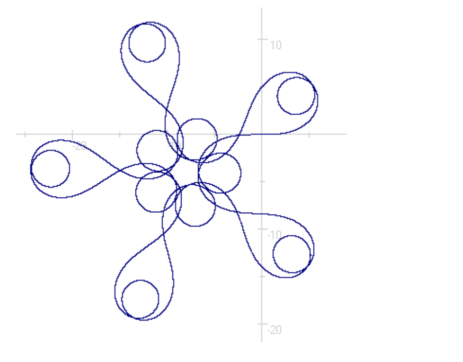
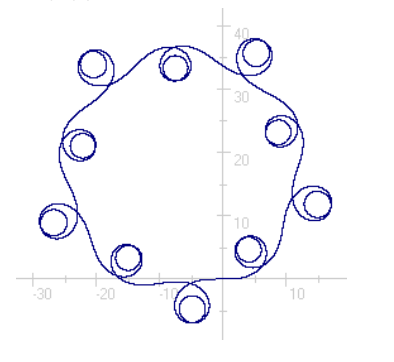
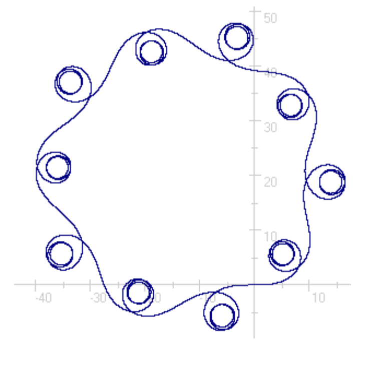
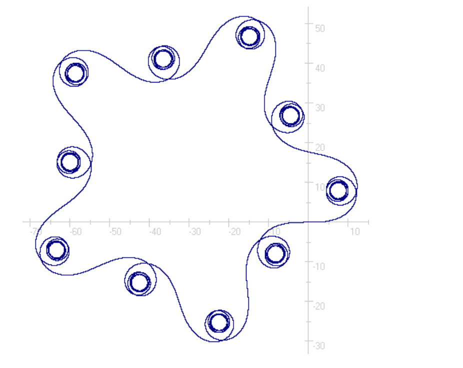
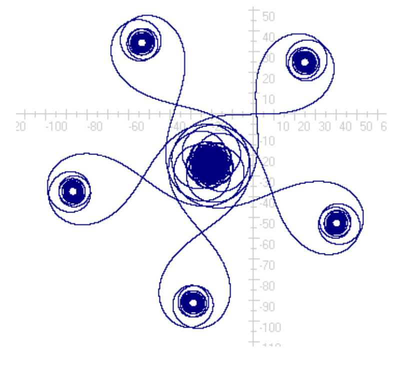
			(al centro dei lati lunghi la curvatura è zero)
a=0.25 b=2		a=1/3 b=2	

B=2/9 A=0.1		A=0.1 b=21/2	
A=0.1 B=19/2		A=0.1 b=8	
A=.1 b=15/2		A=.1 b=3	
A=.1 b=23/2		A=.2 b=8	
0.3 0.5		0.3 2.5	

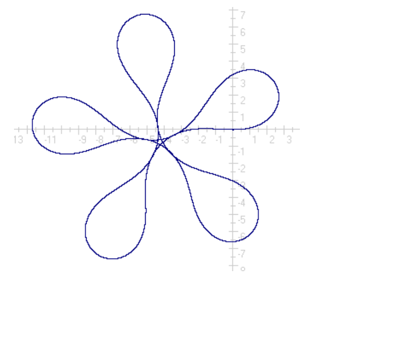
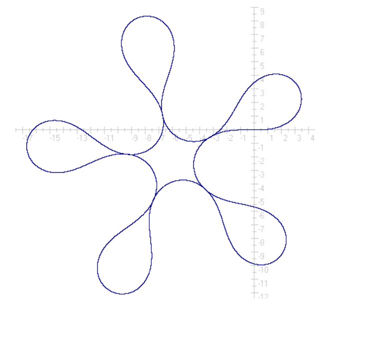
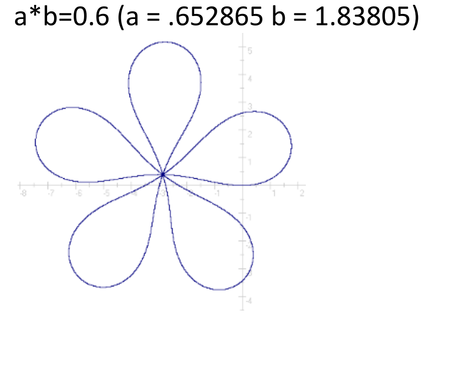
0.5 0.85		0.7 3.5	
0.7 4		0.7 5	
0.7 13/2		0.8 1/2	
1.6 .25		3.2 .125	
2/7 1.4		A= 0.42696 B= 1.17106	

Si possono definire delle classi che hanno a*b = costante. per esempio: **a*b =1/5 b=0.2/a**

a=.8 	A=.4 	A=.25 

A=.125 	A= .11251 	A=0.1 
A=0.08 	A=0.07 	A=0.06 
A=0.05 	A=0.04 	A=0.03 
A=0.02 	A=0.01 	A=0.001 

Esempi di classi simili. questa hanno come base una stella pentagonale.

a*b=0.4 	a*b=0.2 	a*b=0.6 (a = .652865 b = 1.83805) 

definendo a*b sotto forma di una frazione n/m abbiamo una figura con m lati.

per adesso possiamo indicare:

Linea: 1/1

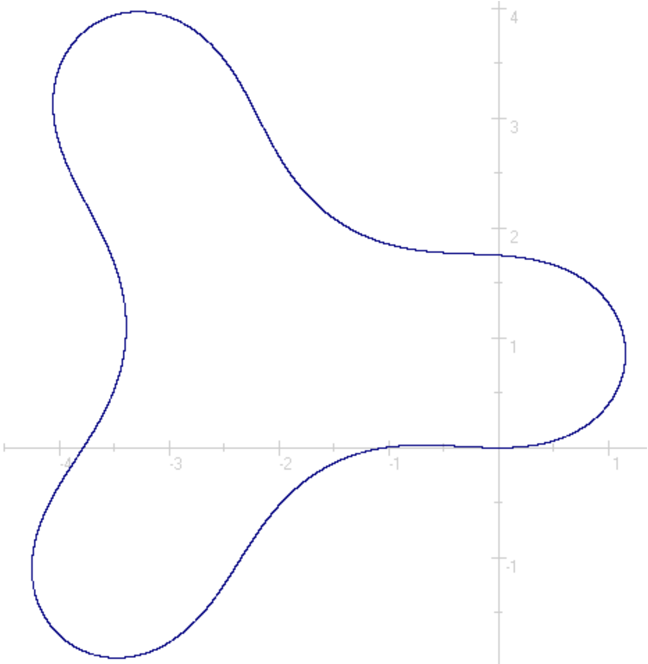
Coppia: 1/2,...

Triangolo: 1/3...

Quadrato: 1/4...

Pentagono: 1/5,...

Esagono: 1/6,...



Ettagono: 1/7...

Lunghezza totale è, dal caso 2 in poi: $\frac{2\pi}{a}$

Vediamo questa: a=1/3 b=1 classe 1/3 (triangolo) la curvatura va da -2/3 a 4/3

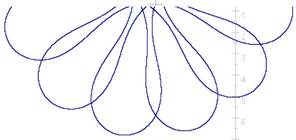
i raggi dei cerchi quindi da 3/2 orario a 3/4 antiorario.

lunghezza sviluppo = 6π

l'incontro con l'asse y avviene al punto 1,75085 con una pendenza di -4° circa.

Se cambiamo b da 1 a 1.25 otteniamo un fiore con 12 petali.

1/3* 5/4 = 5/**12**



Per allineare meglio le curve agli assi, può essere utile utilizzare -cos(s/b) invece che +sin(s/b)

riepilogando, se fissiamo indichiamo con C=2 πR la circonferenza di un cerchio, si può ottenere una curva con N petali avente la stessa lunghezza della circonferenza C con la formula:

$$k = \frac{1}{R} - \cos\left(\frac{N \cdot s}{R}\right)$$

Lunghezza complessiva di una curva chiusa.

In formula del tipo k=a-cos(s/b)

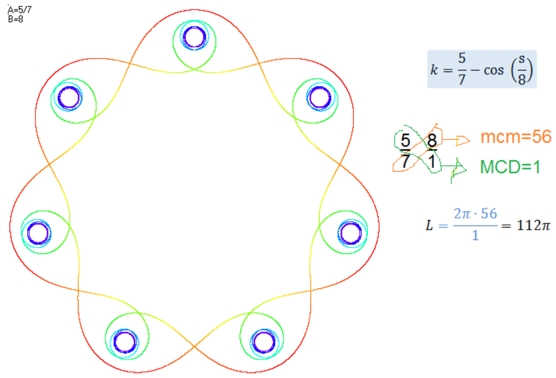
se il prodotto a*b è un numero razionale, significa che il rapporto fra i due raggi di curvatura è razionale.

In quel caso la curva è chiusa se il denominatore di a*b è diverso da 1.

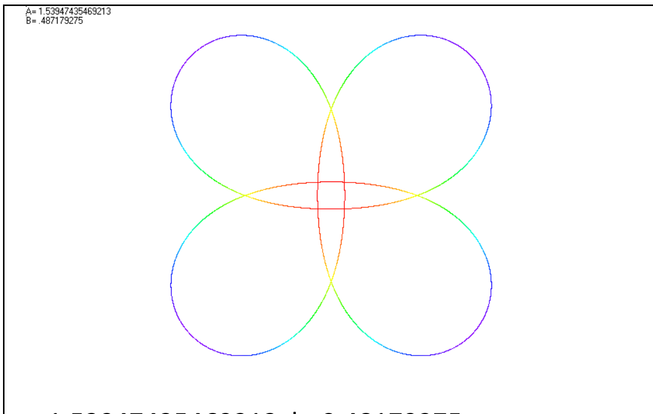
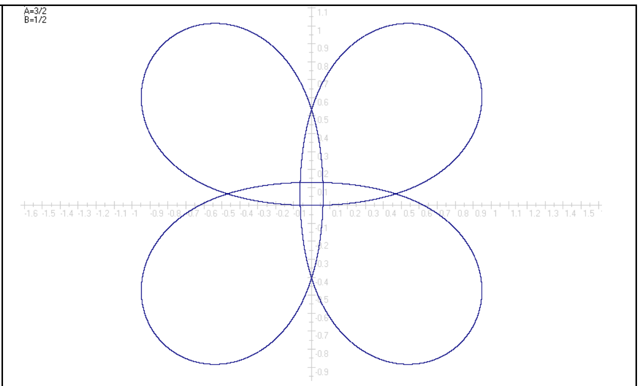
Esprimendo a sia a che b come frazioni di numeri interi: $a=a_1/a_2$ $b=b_1/b_2$ possiamo esprimere la lunghezza della curva come

$$L = 2 \cdot \pi \cdot \frac{mcm(b_1, a_2)}{MCD(a_1, b_2)}$$

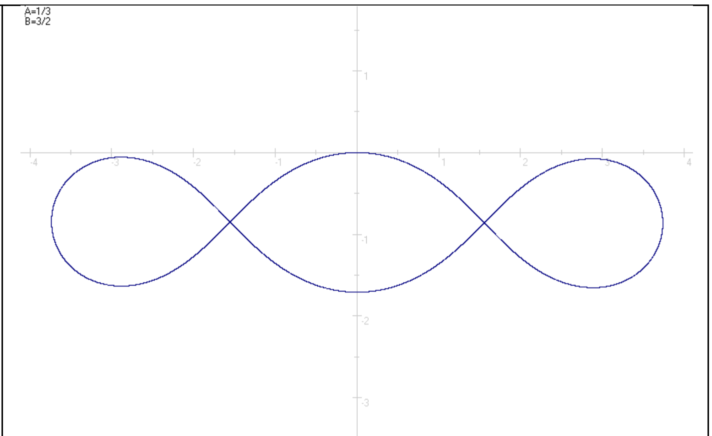
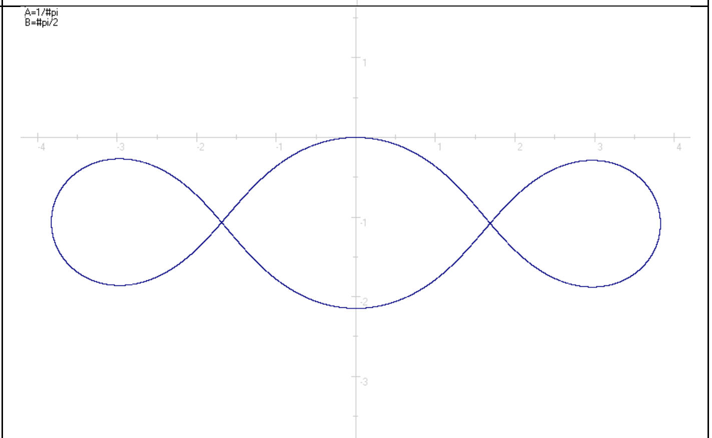
Esempio (con curvatura espressa anche come tonalità di colore):



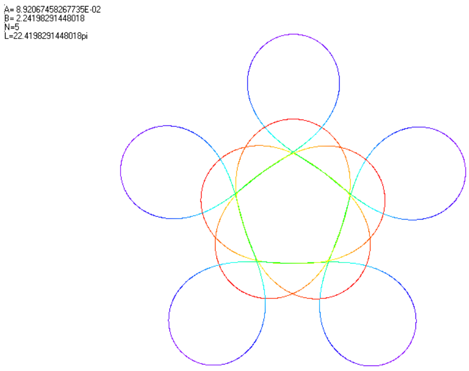
I due disegni identici che seguono hanno uguale lunghezza (4π) e in entrambi i casi $a \cdot b = \frac{3}{4}$

 a=1.53947435469213 b=0.48179275	 a=3/2 b=1/2

:

In un caso come quello a fianco in cui a=1/3 b=3/2 il prodotto è 1/2 e la lunghezza della curva è 6π	
Se sostituiamo 3 con π Ugualmente la curva si chiude, infatti a*b=1/2 Risulta più panciuta della precedente e la lunghezza è $2\pi^2$	

Quando a e b sono con molti decimali, conoscendo N si può calcolare la lunghezza come



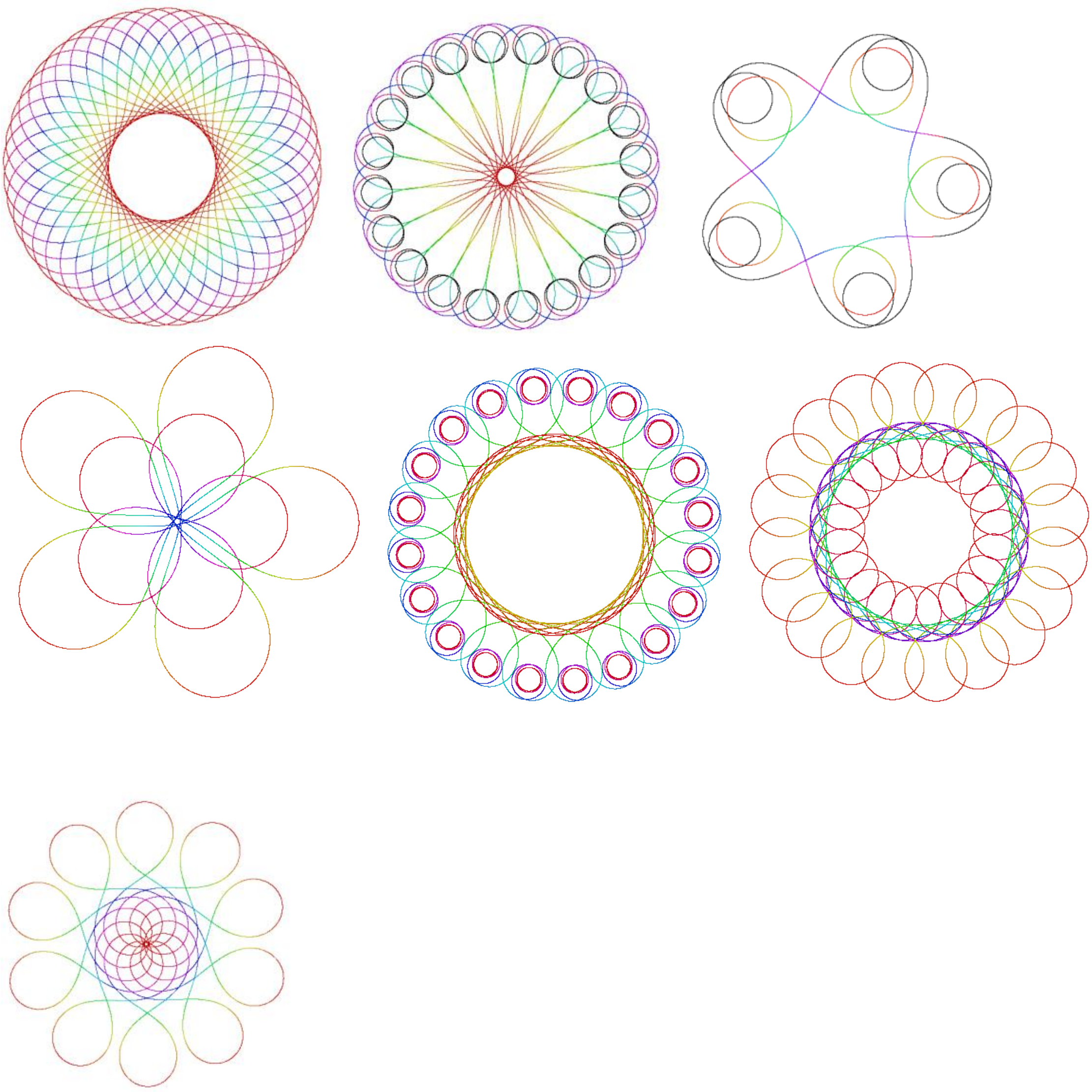
$$L = 2 \cdot \pi \cdot b \cdot N$$

Esempio:

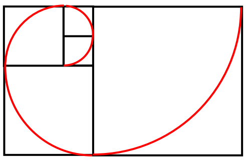
$$ab = \frac{M}{N} = \frac{2}{5}$$

$$L = 2 \cdot 5\pi b = 10\,\pi b$$

Rappresentando la curva in una sfumatura di colore a seconda della curvatura otteniamo figure di questo tipo:



Le spirali



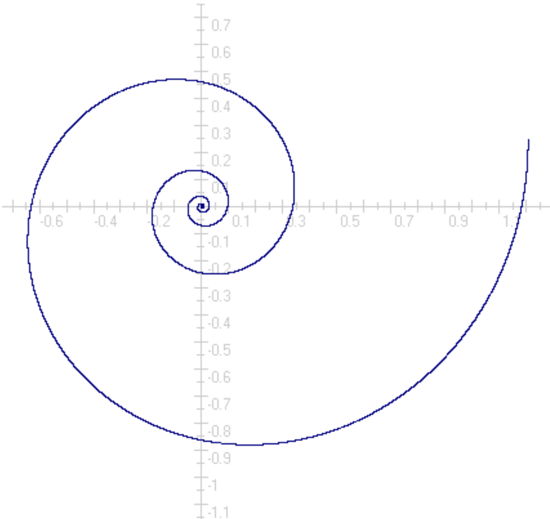
La spirale logaritmica approssimata con i numeri di Fibonacci appare come quarti di cerchio collegati fra loro e inseriti in quadrati aventi per lato i numeri di Fibonacci.
Il rapporto fra un elemento ed il successivo tende a PHI.
Ciascun quadrato "i" preso in esame avrà per raggio $R_i = \frac{S_i}{2\pi}$
La curvatura del quarto di cerchio i-esimo sarà quindi $K_i = \frac{2\pi}{S_i}$.

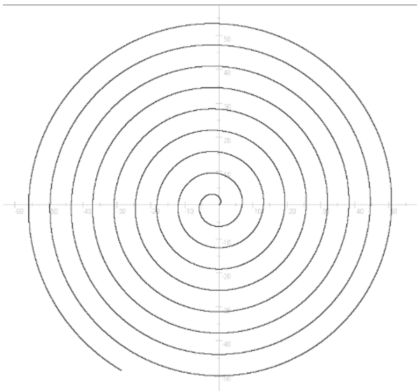
formula della spirale logaritmica

in coordinate polari: $\rho = e^{b\theta}$

in coordinate di sviluppo: $k = \frac{1}{bs}$

il diagramma della figura a fianco è quello della spirale logaritmica ottenuta con b= 0.2





Una spirale <u>simile</u> a quella di Archimede si può invece ottenere con la formula:

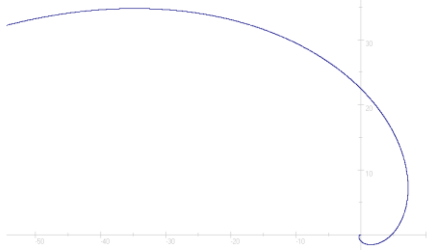
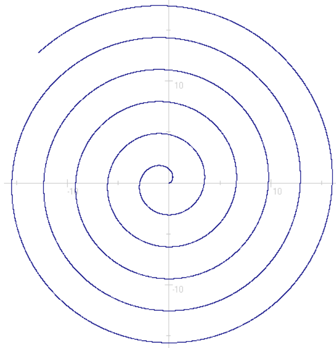
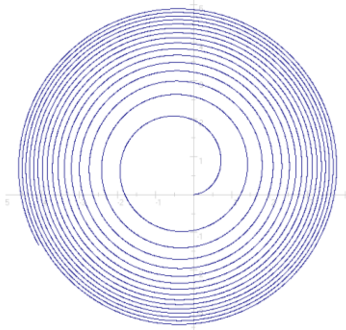
$$k = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

La distanza fra le spire, misurata sul semiasse degli x positivi dopo la prima spira, pare tendere a 2π.
<u>Ma questa NON coincide con la spirale di archimede.</u>

Quindi la formula generica

$$k = \frac{a}{s^b}$$

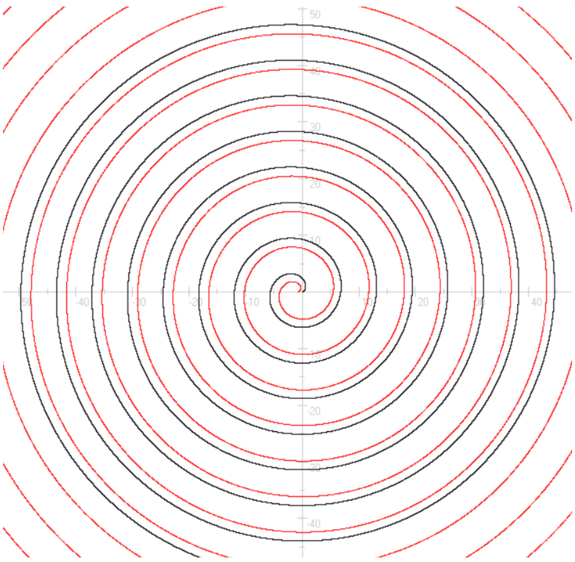
è in grado di produrre vari tipi di spirale.
il parametro *a* determina la dimensione della spirale ovvero la distanza fra le spire,
il parametro *b* determina il tipo di spirale: per *b* inferiore a 0.5 la distanza fra le spire diminuisce man mano che ci allontaniamo dal centro, per valori superiori la distanza fra le spire aumenta.
un *b* negativo si riconduce all'equazione di primo grado con primo coefficiente nullo (clotoide),
l'esponente zero produce un cerchio di raggio *a*.

 a=1, b=1	 a=1, b= 0.5	 a=1, b=0.25

quindi:

valore di *b*	Tipo di spirale
Negativo	Clotoide
Zero	Cerchio di raggio *a*
Inferiore a 0.5	Spirale a spire che si avvicinano
0.5	Converge in una spirale di Archimede
Superiore a 0.5	Spire divergenti
1	Simile alla spirale logaritmica di equazione $k = 1/(s + \sqrt{2})$
Infinito	Retta

Paragone spirale con spirale di Archimede:



nell'esempio qui a fianco in nero la spirale avente formula $k = \frac{1}{\sqrt{s}}$

In rosso la spirale di Archimede avente formula

$$\rho = \theta$$

(spostata verso sinistra di -0.8 sull'asse delle x per renderla parallela a quella blu)

Le due spirali sono parallele dopo il primo giro ma differiscono all'avvio.

Per ricavare la formula esatta della spirale di Archimede si potrebbe esprimere sviluppo e curvatura in funzione di θ in coordinate polari e cercare poi di sostituire θ.

In Coordinate Polari:

$$s = \int \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta$$

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

Prendendo la forma più semplice della spirale archimedea: $\rho = \theta$ e risolvendo:

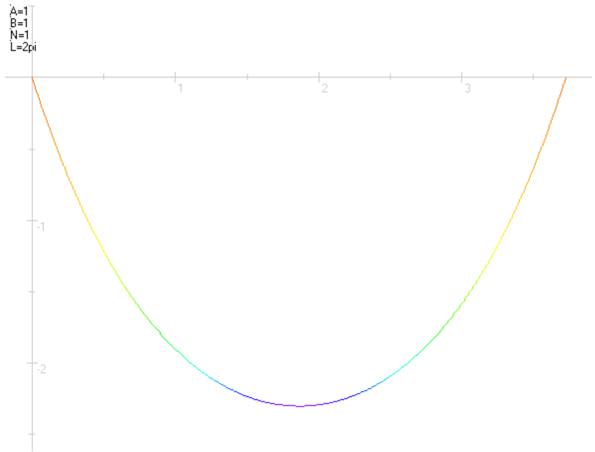
$$s = \frac{\log\left(\sqrt{\theta^2 + 1} + \theta\right)}{2} + \frac{\theta\sqrt{\theta^2 + 1}}{2}$$

$$k = \frac{\theta^2 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}$$

risulta però difficile esplicitare θ nella formula dello sviluppo.

LA CATENARIA

la catenaria avente equazione **y=cosh(x)** ha una formula particolarmente semplice:



$k = \frac{1}{s^2+1}$

l'esempio qui a fianco traccia una catenaria per S che va da - π fino a π

per la formula completa che è

$y = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

l'equazione diventa:

$$k = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Per avere una catenaria simmetrica per S che va da 0 a L, la formula diventa:

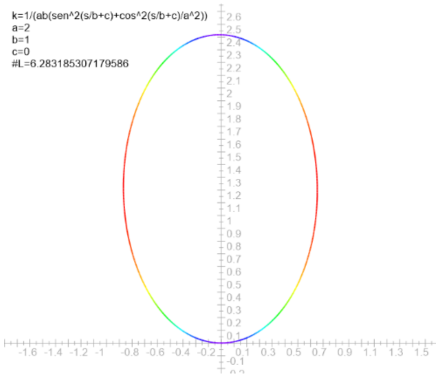
$$k = \frac{a}{\left(s - \frac{L}{2}\right)^2 + a^2}$$

L'angolo di partenza rispetto agli assi che permette di avere la catenaria orientata naturalmente è -72°.751228

Pseudo-Ellisse

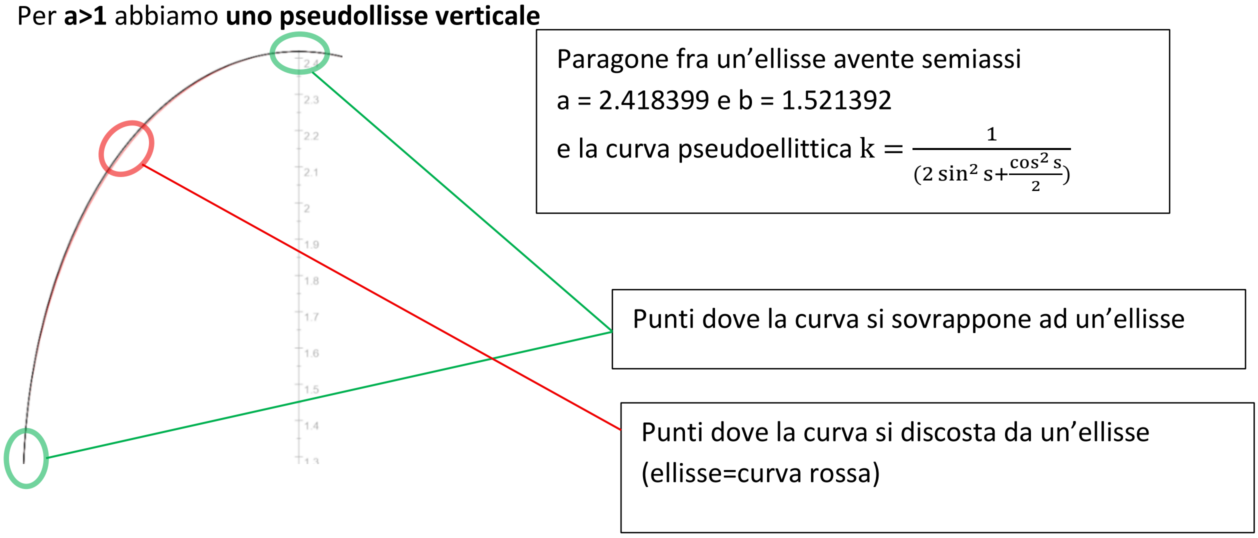
L'equazione

$$k = \frac{1}{\left(a \ sin^2(s) + \frac{cos^2(s)}{a}\right)}$$



produce una curva simile ad un'ellisse che può sovrapporsi ad un'ellisse nei punti di curvatura minima e massima e può avere identici semiassi ma si discosta nelle zone più lontane dai semiassi.

Per **a=1** abbiamo un **cerchio** di raggio 1
Per **a<1** abbiamo **uno pseudollisse orizzontale**
Per **a>1** abbiamo **uno pseudollisse verticale**



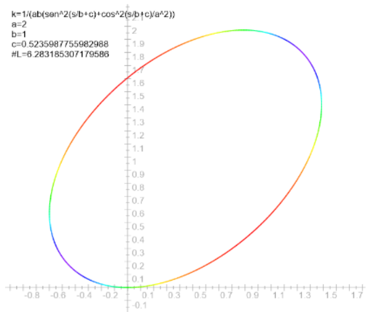
Poiché la circonferenza pseudoellittica viene normalizzata a 2 π la formula descrive una classe di figure simili fra loro.

Per poter **scalare** il pseudoellisse si può introdurre un secondo parametro **b** e la formula diventa:

$$k = \frac{1}{b\left(a \ sin^2\left(\frac{s}{b}\right) + \frac{cos^2\left(\frac{s}{b}\right)}{a}\right)}$$

In questa formula, il perimetro dell'ellisse diviene 2 π b

Pseudo-ellisse inclinato:



L' inclinazione della figura è particolarmente semplice perché basta sommare ad s/b l'angolo desiderato

$$k = \frac{1}{b\left[\ a \ sin^2\left(\frac{s}{b}+c\right) + cos^2\left(\frac{s}{b}+c\right)/a\right]}$$

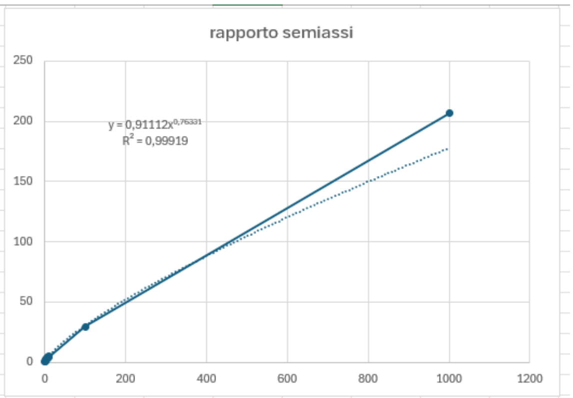
Avendo una serie di coppie di punti (s, k) che includono la massima e la minima curvatura del ramo di ellisse, si può stimare i parametri **a**, **b** e **c** come segue:

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{kMax}{kmin}}} \qquad \boxed{b = \frac{a}{kMax}} \qquad \boxed{c = \pi - \frac{skMax}{b}}$$

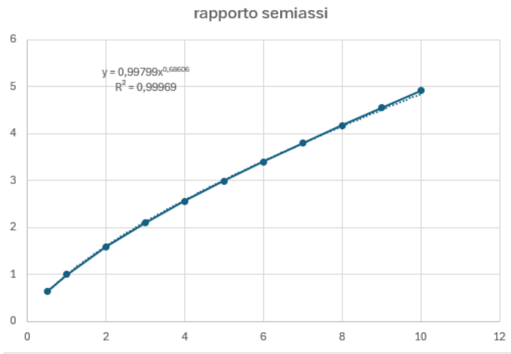
Dove kMax e kmin sono i valori massimo e minimo di curvatura e skMax è il valore di s corrispondente a kMax.

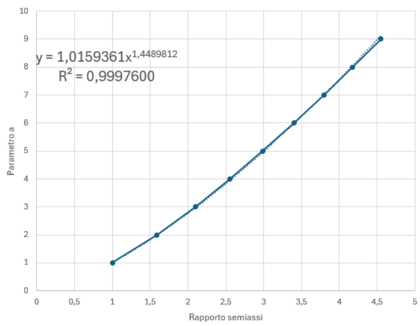
Il parametro **a** non coincide con il rapporto fra i semiassi di un’ellisse tradizionale sovrapposto:

1/a	rapporto semiassi
0,5	0,628801
1	1
2	1,590328
3	2,094956
4	2,555185
5	2,986869
6	3,39809
7	3,793645
8	4,17666
9	4,549312
10	4,913195
100	29,458458
1000	206,519929



Per piccoli valori di a (fino a 10) si può approssimare con la formula :





Calcolo parametro a in funzione del rapporto semiassi

Ancora sulle funzioni periodiche con gli zeri delle funzioni J_n di Bessel:

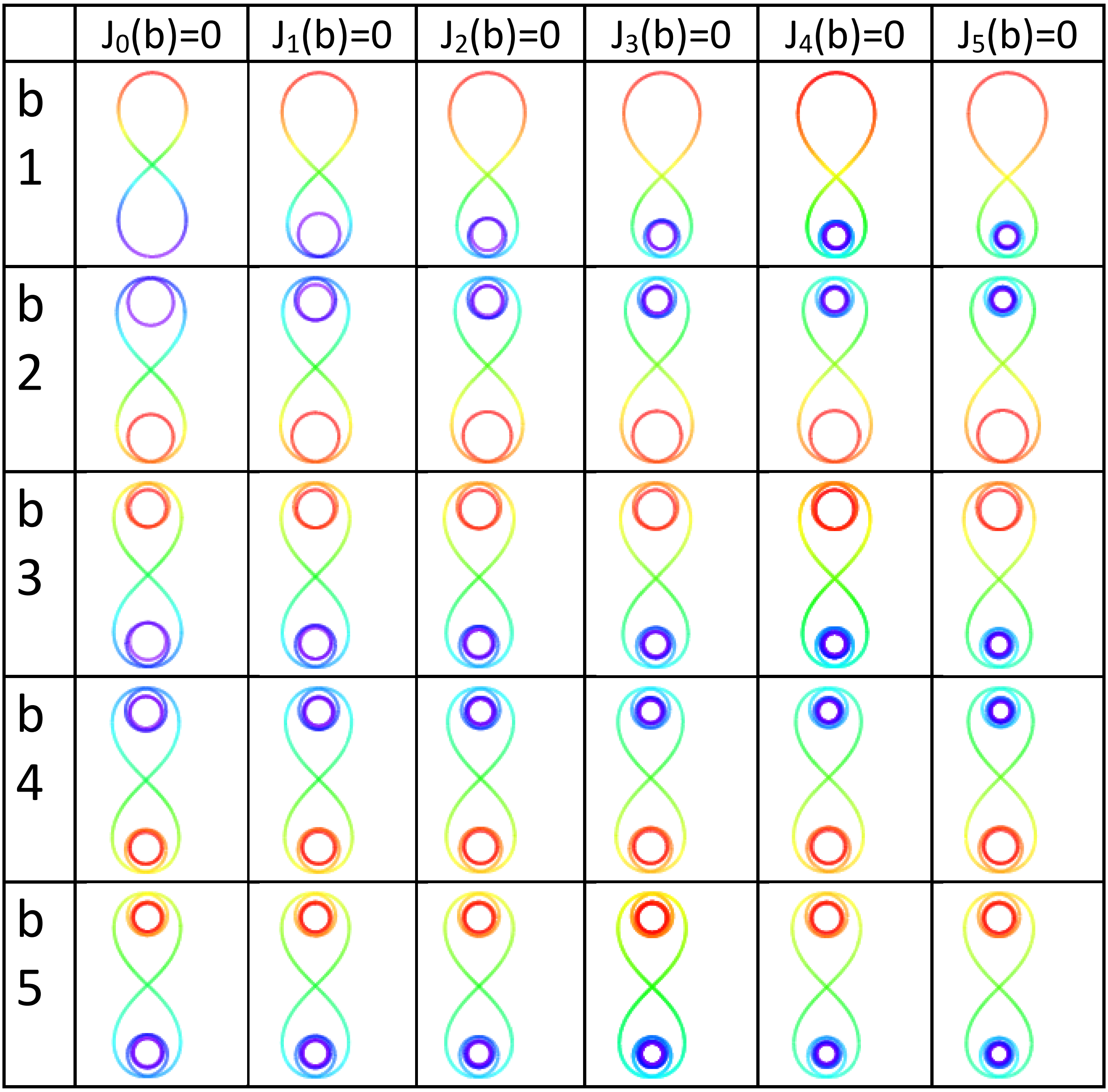
Abbiamo visto che la funzione **k=a-cos(s/b)** diviene una lemniscata <u>verticale</u> per a=0 e b tale che: $J_0(b)=0$.

Possiamo anche notare, colorando verso il rosso la curvatura oraria negativa e verso il violetto quella antioraria positiva, che *b* pari e *b* dispari producono lemniscate con curvature opposte.

Prendiamo la formula generica **k = n/b-cos(s/b)** , per n=0 abbiamo le lemniscate del primo caso: una lemniscata simmetrica, dove il numero di volute dipende dalla b che azzera la J_0.

Ma anche le altre J_n di Bessel causano curve chiuse, tutta via asimmetriche.

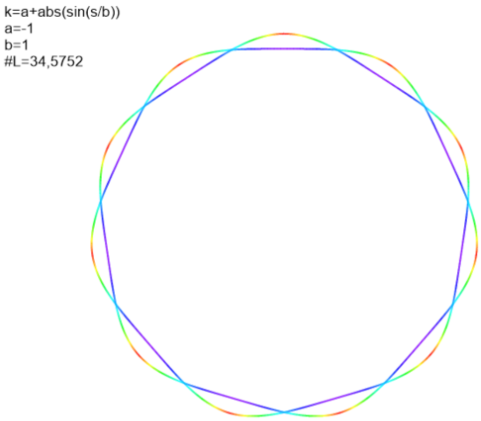
Esempio:



Valori di b nella formula **k=n/b-cos(s/b)**

	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
b1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
b2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
b3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
b4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
b5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

Valore assoluto delle funzioni trigonometriche.

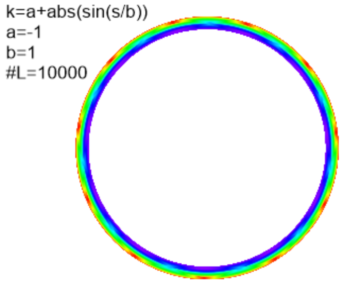


Consideriamo la funzione $k = a + \left|sen\left(\frac{s}{b}\right)\right|$

E poniamo inizialmente b=1. La periodicità del seno da [-1,1] diventa così [0,1].

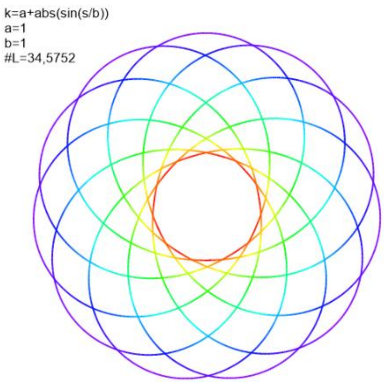
Assumendo a=-1 i valori di k vanno da -1 a 0 ed otteniamo una figura che sembra chiudersi nel punto s=34.584 e forma una figura visivamente regolare con 11 lati.

In realtà questa è un'approssimazione perché la figura non torna realmente su sé stessa, ma continuando il tracciamento, pian piano la figura sparirebbe in una banda circolare come in figura a destra.



La curvatura massima è 0, (retta), disegnata in blu quando s = $\frac{\pi}{2} \pm \pi$

La curvatura minima, -1 e disegnata in rosso e si ha quando s=0$\pm\pi$



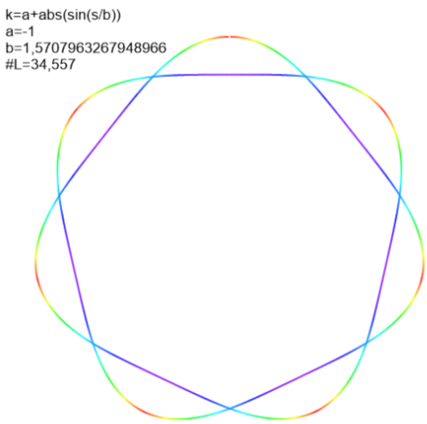
Altri valori di a producono figure molto suggestive, come questa, con a=1

Anche in questo caso, l'apparente chiusura della curva la otteniamo alla lunghezza 34,752 e produce una figura regolare con 11 lati.

La curvatura massima è 2, ovvero tangente ad un cerchio di raggio 0.5, è disegnata in violetto, si ottiene quando s = $\frac{\pi}{2} \pm \pi$

La curvatura minima è 1, disegnata in rosso ed è quando s=0$\pm\pi$

Per normalizzare, rispetto a π, i valori di s si può assumere $b = \frac{\pi}{2}$

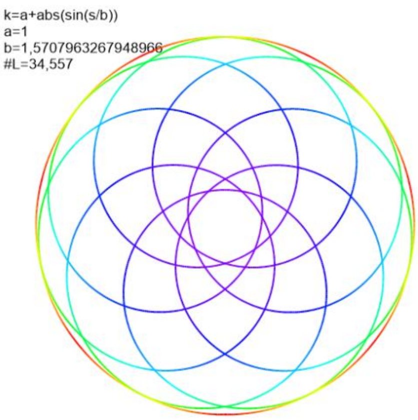


Assumendo di nuovo a=-1, otteniamo stavolta una figura con chiusura apparente su 7 lati nel punto s=34.585 dove la curvatura massima (0) si ha quando s è un numero dispari ($s = 1 \pm 2$)

Mentre quella minima (-1) si ha nei numeri pari ($s = 0 \pm 2$)

E' molto curiosa questa apparizione arrotondata di un undecagono e di un ettagono. Sarà da indagare se questa approssimazione può dipendere dall'approssimazione di Pi Greco di Archimede $\pi \cong \frac{22}{7}$

Quindi Pi greco mezzi diventa 11/7.



Anche in questo caso, ponendo a=1 otteniamo una figura articolata con una simmetria su 7 lati, che chiude circa a 34.557 solo che, a differenza di quella ad 11 lati, la curvatura rossa si trova all'esterno.